**EJERCICIO ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA** **CAPÍTULO 5**

**AUTOR DEL CURSO**: Javier García

**EJERCICIO RESUELTO**: Miguel Ángel Montañez 6-09-2022

**Ejercicio 5. Obtener los autovectores de la matriz helicidad del fotón ($h_{fotón}$).**

La matriz helicidad del fotón es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i\cos\theta & i\,\text{sen}\theta\cdot\text{sen}\varphi \\ i\cos\theta & 0 & -i\,\text{sen}\theta\cdot\cos\varphi \\ -i\,\text{sen}\theta\cdot\text{sen}\varphi & i\,\text{sen}\theta\cdot\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Llamamos:

$A = i\cos\theta$ $\quad B = i\,\text{sen}\theta\cdot\text{sen}\varphi$ $\quad C = i\,\text{sen}\theta\cdot\cos\varphi$

$$\begin{pmatrix} 0 & -A & B \\ A & 0 & -C \\ -B & C & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -A & B \\ A & -\lambda & -C \\ -B & C & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$- \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -C \\ C & -\lambda \end{vmatrix} + A \begin{vmatrix} A & -C \\ -B & -\lambda \end{vmatrix} + B \begin{vmatrix} A & -\lambda \\ -B & C \end{vmatrix} = 0$$

$$- \lambda(\lambda^2 + C^2) + A(- \lambda A - BC) + B(AC - \lambda B) = 0$$

$$- \lambda^3 - \lambda C^2 - \lambda A^2 - ABC + BAC - \lambda B^2 = 0$$

$$- \lambda^3 - \lambda(A^2 + B^2 + C^2 ) = 0$$

Como:

$$A^2 + B^2 + C^2 = - (\cos\theta)^2 - (\operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi)^2 - (\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\varphi)^2 = - 1$$

$$- \lambda^3 + \lambda = 0$$

Loa autovalores son $\lambda = 1, 0, -1$.

Calculamos el autovector correspondiente a $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -A & B \\ A & -1 & -C \\ -B & C & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- v_1 - Av_2 + Bv_3 = 0$$

$$Av_1 - v_2 - Cv_3 = 0$$

$$- Bv_1 + Cv_2 - v_3 = 0$$

Operamos:

$$v_1 = - Av_2 + Bv_3 \quad \text{(primera ecuación)}$$

$$A(-Av_2 + Bv_3) - v_2 - Cv_3 = 0 \quad \text{(segunda ecuación)}$$

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{AB - C}{1 + A^2} = \frac{i\cos\theta\cdot i\,\mathrm{sen}\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi - i\,\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\varphi}{1 - (\cos\theta)^2} = \frac{-\cos\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi - i\cos\varphi}{\mathrm{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi + i\cos\varphi}{-\,\mathrm{sen}\theta}$$

$$v_1 = -A\,\frac{AB - C}{1 + A^2}\,v_3 + Bv_3 = \frac{-A^2B + AC + B + A^2B}{1 + A^2}\,v_3$$

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{AC + B}{1 + A^2} = \frac{i\cos\theta\cdot i\,\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi}{1 - (\cos\theta)^2} = \frac{-\cos\theta\cdot\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\varphi}{\mathrm{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\cdot\cos\varphi - i\,\mathrm{sen}\varphi}{-\,\mathrm{sen}\theta}$$

Luego:

$$e_1 = a\begin{pmatrix} \cos\theta\cdot\cos\varphi - i\,\mathrm{sen}\varphi \\ \cos\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi + i\cos\varphi \\ -\,\mathrm{sen}\theta \end{pmatrix} \qquad \text{(en la base } \{e_x, e_y, e_z\}\text{)}$$

Normalizando:

$$e_1^{\dagger}\cdot e_1 = 2a^2$$

Eligiendo $a = 1/\sqrt{2}$:

$$\hat{e}_1 = 1\sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix} \cos\theta\cdot\cos\varphi - i\,\mathrm{sen}\varphi \\ \cos\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi + i\cos\varphi \\ -\,\mathrm{sen}\theta \end{pmatrix} \qquad \text{(normalizado)}$$

Vamos a comprobar que $\hat{e}_1$ es autovector con $\lambda = 1$:

$$1\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i\cos\theta & i\,\text{sen}\theta\cdot\text{sen}\varphi \\ i\cos\theta & 0 & -i\,\text{sen}\theta\cdot\cos\varphi \\ -i\,\text{sen}\theta\cdot\text{sen}\varphi & i\,\text{sen}\theta\cdot\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta\cdot\cos\varphi - i\,\text{sen}\varphi \\ \cos\theta\cdot\text{sen}\varphi + i\cos\varphi \\ -\text{sen}\theta \end{pmatrix} =$$

$$1\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} -i(\cos\theta)^2\cdot\text{sen}\varphi + \cos\theta\cdot\cos\varphi - i(\text{sen}\theta)^2\cdot\text{sen}\varphi \\ i(\cos\theta)^2\cdot\cos\varphi + \cos\theta\cdot\text{sen}\varphi + i(\text{sen}\theta)^2\cdot\cos\varphi \\ -i\,\text{sen}\theta\cdot\cos\theta\cdot\text{sen}\varphi\cdot\cos\varphi - \text{sen}\theta\cdot(\text{sen}\varphi)^2 + i\,\text{sen}\theta\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi\cdot\text{sen}\varphi - \text{sen}\theta\cdot(\cos\varphi)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \quad 1\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta\cdot\cos\varphi - i\,\text{sen}\varphi \\ \cos\theta\cdot\text{sen}\varphi + i\cos\varphi \\ -\text{sen}\theta \end{pmatrix}$$

Se demuestra que $\hat{e}_1$ es el autovector con $\lambda = 1$.

Calculamos ahora el autovector correspondiente a $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -A & B \\ A & 0 & -C \\ -B & C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-Av_2 + Bv_3 = 0$$

$$Av_1 - Cv_3 = 0$$

$$-Bv_1 + Cv_2 = 0$$

Operamos:

$$Av_2 = Bv_3 \quad \text{(primera ecuación)}$$

$$Av_1 = Cv_3 \quad \text{(segunda ecuación)}$$

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{B}{A} = \frac{i\,\mathrm{sen}\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi}{i\cos\theta} = \frac{\mathrm{sen}\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi}{\cos\theta}$$

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{C}{A} = \frac{i\,\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\varphi}{i\cos\theta} = \frac{\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\varphi}{\cos\theta}$$

Luego:

$$e_0 = a\begin{pmatrix} \mathrm{sen}\theta\cdot\cos\varphi \\ \mathrm{sen}\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{(en la base } \{e_x, e_y, e_z\}\text{)}$$

Normalizando:

$$e_0^{\dagger}\cdot e_0 = a^2$$

Eligiendo a = 1:

$$\hat{e}_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\theta\cdot\cos\varphi \\ \mathrm{sen}\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{(normalizado)}$$

Vamos a comprobar que el vector $\hat{e}_0$ es autovector con $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i\cos\theta & i\,\mathrm{sen}\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi \\ i\cos\theta & 0 & -i\,\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\varphi \\ -i\,\mathrm{sen}\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi & i\,\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\theta\cdot\cos\varphi \\ \mathrm{sen}\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -i\cos\theta\cdot\mathrm{sen}\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi + i\,\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi \\ i\cos\theta\cdot\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\varphi - i\,\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi \\ -i(\mathrm{sen}\theta)^2\cdot\mathrm{sen}\varphi\cdot\cos\varphi + i(\mathrm{sen}\theta)^2\cdot\cos\varphi\cdot\mathrm{sen}\varphi \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\theta\cdot\cos\varphi \\ \mathrm{sen}\theta\cdot\mathrm{sen}\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Se demuestra que $\hat{e}_0$ es el autovector con $\lambda = 0$.

Calculamos, por último, el autovector correspondiente a $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -A & B \\ A & 1 & -C \\ -B & C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 - Av_2 + Bv_3 = 0$$

$$Av_1 + v_2 - Cv_3 = 0$$

$$-Bv_1 + Cv_2 + v_3 = 0$$

Operamos:

$$v_1 = Av_2 - Bv_3 \qquad \text{(primera ecuación)}$$

$$A(Av_2 - Bv_3) + v_2 - Cv_3 = 0 \qquad \text{(segunda ecuación)}$$

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{AB + C}{1 + A^2} = \frac{i\cos\theta \cdot i\,\text{sen}\theta \cdot \text{sen}\varphi + i\,\text{sen}\theta \cdot \cos\varphi}{1 \quad - (\cos\theta)^2} = \frac{-\cos\theta \cdot \text{sen}\varphi + i\cos\varphi}{\text{sen}\theta} = \frac{\cos\theta \cdot \text{sen}\varphi - i\cos\varphi}{-\,\text{sen}\theta}$$

$$v_1 = A\,\frac{AB + C}{1 + A^2}\,v_3 \; - Bv_3 = \frac{A^2B + AC - B - A^2B}{1 + A^2}\;v_3$$

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{AC - B}{1 + A^2} = \frac{i\cos\theta \cdot i\,\text{sen}\theta \cdot \cos\varphi - i\,\text{sen}\theta \cdot \text{sen}\varphi}{1 \quad - (\cos\theta)^2} = \frac{-\cos\theta \cdot \cos\varphi - i\,\text{sen}\varphi}{\text{sen}\theta} = \frac{\cos\theta \cdot \cos\varphi + i\,\text{sen}\varphi}{-\,\text{sen}\theta}$$

Luego:

$$e_{-1} = a \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot \cos\varphi + i\,\text{sen}\varphi \\ \cos\theta \cdot \text{sen}\varphi - i\cos\varphi \\ -\,\text{sen}\theta \end{pmatrix} \qquad \text{(en la base } \{e_x, e_y, e_z\}\text{)}$$

Normalizando:

$$e_{-1}^{\dagger} \cdot e_{-1} = 2a^2$$

Eligiendo $a = 1/\sqrt{2}$:

$$\hat{e}_{-1} = 1\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot \cos\varphi + i\,\text{sen}\varphi \\ \cos\theta \cdot \text{sen}\varphi - i\cos\varphi \\ -\,\text{sen}\theta \end{pmatrix} \qquad \text{(normalizado)}$$

Vamos a comprobar que $\hat{e}_{-1}$ es autovector con $\lambda = -1$:

$$1\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i\cos\theta & i\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi \\ i\cos\theta & 0 & -i\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\varphi \\ -i\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi & i\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta\cdot\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi - i\cos\varphi \\ -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} =$$

$$1\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} -i(\cos\theta)^2\cdot\operatorname{sen}\varphi - \cos\theta\cdot\cos\varphi - i(\operatorname{sen}\theta)^2\cdot\operatorname{sen}\varphi \\ i(\cos\theta)^2\cdot\cos\varphi - \cos\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi + i(\operatorname{sen}\theta)^2\cdot\cos\varphi \\ -i\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi\cdot\cos\varphi + \operatorname{sen}\theta\cdot(\operatorname{sen}\varphi)^2 + i\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\theta\cdot(\cos\varphi)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= -1\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta\cdot\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi - i\cos\varphi \\ -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

Se demuestra que $\hat{e}_{-1}$ es el autovector con $\lambda = -1$.